EXAMEN D'ANALYSE III

Session Normale

Durée : 1h30

Exercice 1 **(7 points)**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 de la fonction ch : $y \mapsto \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, sur l'intervalle $[0, x]$.
2. En déduire que
$$\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
3. La fonction ch est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.
4. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\operatorname{ch}(x) \leq \frac{b}{a+b}\operatorname{ch}(x-a) + \frac{a}{a+b}\operatorname{ch}(x+b)$$

Exercice 2 **(6,5 points)**

1. Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.
2. En déduire le développement asymptotique d'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x - 1}$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$.
4. Montrer que la fonction
$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x + x(e^x - 1)}{2(e^x - 1)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
admet un extremum local en 0. Préciser la nature de cet extremum.

Exercice 3 **(6,5 points)**

1. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1 - \cos(t)}{t^2\, e^t}$.
2. En déduire le développement asymptotique d'ordre 3 en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 \dfrac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}$.
3. Soit la fonction $h : x \mapsto x f(x)$. Montrer que la courbe de h admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et donner son équation.
4. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}$.

BONNE CHANCE